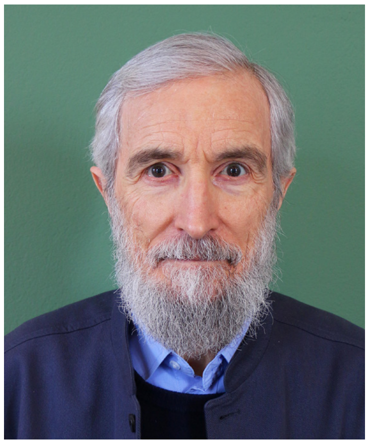

Rolf Schockpriset i logik och filosofi 2020

Under 1930 talets första hälft skapade den tyske logikern Gerhard Gentzen tre besläktade sätt att presentera härledningar inom logiska system: naturlig deduktion, sekvenskalkyl och sekventiell naturlig deduktion. Naturlig deduktion fick sitt namn på grund av dess nära anslutning till praktisk slutledningskonst: de primitiva slutledningsstegen delas in i introduktionssteg, vilka säger hur en sats av en viss form nås som konklusion, och eliminationssteg, som säger vad slags konklusioner kan vinnas från satser av denna form. En härledning påbörjas från antingen ett axiom eller ett antagande, och vissa steg låter antaganden upphävas. I ett vackert uppsatskapitel visade Gentzen hur hans grundläggande slutledningssteg, med dess introduktions- och eliminations-struktur, kan återfinnas i Euklides bevis för primtalens oändlighet. Naturlig deduktion är ett oöverträffat instrument för att i praktiken hitta en härledning av en önskad konklusion från givna antaganden. Emellertid är de härledda satserna inte obetingat hävdade: det råder ett intrikat samband mellan antaganden och den vunna konklusionen. Därför föredrog Gentzen vid det teoretiska studiet av härledningar att använda sig av sekvenskalkyl, där de bevisade teoremen har formen:

antagandena $A_1,\ldots,A_k$ har C till följd.

Ett antagande i naturlig deduktion motsvaras då av ett axiom:

Antagandet A har A till följd

Han visade därefter sin berömda Hauptsatz rörande så kallade ”snittelimination”. Gentzens *Schnitt* är en slutledningsregel som säger:

Givet att antagandena $A_1,\ldots,A_k$ har D till följd
och att antagandena D, $B_1,\ldots,B_m$ har C till följd,
så har antagandena $A_1,\ldots,A_k$, $B_1,\ldots,$Bm satsen C till följd.

Sålunda kan i en härledning med snittregeln satser förekomma som inte är del av konklusionen. I en “snittfri” härledning kan detta inte ske och man har maximal kontroll över bevisföringen. Denna Hauptsatz, enligt vilken varje härledning kan transformeras till en snittfri sådan, visade sig vara synnerligen brukbar vid det teoretiska studiet av allt starkare logiska system. Gentzen själv utarbetade en version för aritmetiken, medan för högre ordningens logik, med kvantifiering över satser och satsfunktioner, formulerade den japanske logikern Takeuti en viktig förmodan att snittelimination skulle råda även där. Bevisen av Gentzens resultat för predikatlogik och aritmetik genomförs med intrikat syntaktisk manipulation av härledningar i sekvenskalkyl, men de enskilda stegen är inte innehållsligt klara. Detta *Hauptsatz*paradigm vidareutvecklades sedan under trettio år, bland annat till kalkyler med oändliga bevisträd av tysken Schütte, varvid naturlig deduktion inte beaktades, utan förföll i teoretisk träda.

Detta förhållande ändrades radikalt av Dag Prawitz i doktorsavhandlingen *Natural Deduction* från 1965. Prawitz observerade att en *snittfri* härledning i sekvenskalkyl motsvaras inom naturlig deduktion av en härledning i *normalform* där alla användningar av eliminationsregler föregår alla användningar av introduktionsregler, och att det finns en uppsättning enkla reduktionssteg för att ta bort maximalsatser. Med en maximalsats förstås här en konklusion till en introduktionsregel som samtidigt är premiss i ett eliminationsslut. Prawitz grundläggande insikt var att sådana steg är överflödiga och kan systematiskt borttas genom en reduktionsförfarande som leder till en härledning i *normalform*. Normaliseringen av härledningar till normalform kan mycket väl jämföras med evalueringen av ett komplicerat räkneuttryck till ett (arabiskt) siffervärde med hjälp av skolaritmetikens algoritmer. Det har sagts att en bra doktorsavhandling i logik blir en övningsuppgift i följande generationers läroböcker, medan en exceptionell avhandling blir till en definition. Få doktorsavhandlingar uppnår denna status, men *Natural Deduction* hör utan tvekan hemma i denna utvalda grupp. Sålunda ger Neil Tennant och James Garson bägge i sina läroböcker för – näst intill – nybörjarstadiet i logik utförliga behandlingar av bevisteoretisk normalisering.

Bevisteoretisk normalisering var okomplicerad att förstå och utvidgades snabbt till andra logiska system, bland annat aritmetik och teorin för induktiva definitioner. Dag Prawitz gav själv i uppsatsen *Ideas and Results in Proof Theory* en magistral framställning av hur tidigare bevisteoretiska resultat inom den transformationstekniska Gentzenskolan kunde presenteras för naturlig deduktion på ett tilltalande och lättillgängligt sätt.

Efter ett knappt decennium hade Prawitz synsätt anammats av ett antal logiker, bland andra matematikerna Per Martin-Löf och Anne Troelstra, samt filosofen Michael Dummett. Martin-Löf gav tidigt ett avgörande bidrag i studiet av normalisering då han överförde W.W. Taits *computability*-bevismetod för normalisering – ”beräkning” – av termer i en ”typad lambdakalkyl” till härledningar i naturlig deduktion. Härigenom blev det möjligt att ge uniforma bevis av metamatematiska satser för många system och vid det andra skandinaviska logiksymposiet i Oslo 1970 presenterade Martin-Löf denna metod.

Dag Prawitz hade tidigare även arbetat med sekvenskalkyl och gav i sin licentiatavhandling mycket tidiga, viktiga resultat om automatisk bevisföring. Han bevisade även Takeutis förmodan om snittelimination för andra ordningens logik med ett synnerligen elegant modellteoretiskt argument vilket, överfört till naturlig deduktion, bevisade att varje härledning har en normalform, men beviset ger ingen procedur för att, såsom var fallet vid fösta ordningens logik, nå denna normalform via systematiska reduktionssteg. Vid Oslosymposiet presenterades ett arbete av J-Y Girard rörande en analogi till Gödels *Dialectica*-tolkning för andra ordningens system, och tekniken som utvecklades där visade sig överförbar också till andra ordningens logik inom naturlig deduktion. Oberoende av varandra insåg Girard, Martin-Löf och Prawitz att Girards metod för att tämja den så kallade impredikativiteten hos högre ordningens lambdatermer var tillämpbar även på andra ordningens logik. Härigenom skärptes det modellteoretiska beviset av Takeutis förmodan till ett normaliseringsresultat. Såväl för första som andra ordningens logik skärpte Prawitz i sitt Oslo-arbete normaliseringen från *Natural Deduction* till stark normalisering, det vill säga att alla reduktionsföljder av en härledning kan fortsättas till en och samma normalform, och definierade härvid ett begrepp, *validity*, för härledningar, väsentligen en version av Tait/Martin-Löfs *computability*.

Oxfordfilosofen Michael Dummett gav 1973 en första ansats till en filosofisk tolkning av normaliseringsresultaten och sedan dess har studiet av Naturlig Deduktion såsom formulerat av Dag Prawitz fortsatts under namnet Proof-Theoretic Semantics och under livaktig interaktion med Dummetts uppfattningar om en *Theory of Meaning*. En viktig serie konferenser i Tübingen från 1998, med Peter Schroeder-Heister som primus motor vid sidan av Dag Prawitz, har väsentligt bidragit till att rikta uppmärksamhet på naturlig deduktion även bland filosofer. Vid fjärde kongressen i logik, metodologi och vetenskapsfilosofi (LMPS IV) i Bucharest 1971 inledde Prawitz ett program rörande allmän bevisteori i vilket hans begrepp *validity* spelar en central roll. Under de gångna fyra årtiondena har Prawitz prövat olika möjligheter, ofta med ändringar på centrala punkter, och teorin befinner sig fortfarande stadd i utveckling. I detta arbete har även ett antal yngre forskare från Italien, Tyskland, Storbritannien, och Frankrike tagit del, och bland filosofer är normalisering och besläktade resultat i högsta grad ett levande forskningsområde.

Per Martin-Löfs första bidrag till bevisteorin var hans normaliseringssats för teorin för induktiva definitioner och insikten att Taits *computability*-metod låter sig överföras även till bevisteoretisk normalisering. Under hösten 1968 utvecklade William Howard i Chicago en analogi mellan härledningar i en viss Hilbertkalkyl och en kombinatorisk funktionskalkyl. Per Martin-Löf insåg omedelbart att naturlig deduktion gav en mycket bättre motsvarighet, i själva verket en isomorfi med avseende på reduktionssteg i en typad lambdakalkyl, vilket gav sista pusselbiten i vad som nu är känt som *the Curry-Howard isomorphism*, och publicerade detta i ett arbete som spreds i mars 1969, ett arbete som även behandlade normalisering för en naturlig-deduktions-version av satslogik med formler av oändlig längd. Han utvidgade även sitt bevis av normalisering för andra ordningens intuitionistiska logik till intuitionistisk enkel (impredikativ) typteori. Till denna tidiga period hör också Martin-Löfs förmodan rörande identitet för bevis som publicerades av Dag Prawitz i Oslovolymen och denna förmodan har varit föremål för mycket diskussion sedan dess. En karaktärisering av de bevisbart rekursiva funktionerna i andra ordningens aritmetik samt ett vackert bevis av det så kallade *Church-Rosser*-teoremet: normalformen är unik, är andra metamatematiska resultat från denna tid.

Sedan 1970 har Martin-Löf arbetat med att skapa en konstruktiv typteori med den fundamentala relationen

t:A

Denna tillåter ett stort antal möjliga läsarter:

t är en term av typ A
t är ett element av mängden A
t är ett bevis för propositionen A
t är en lösning av uppgiften A
t är en realisering av intentionen A
t är ett program som möter specifikationen A

Termen *konstruktiv* är tagen från Brouwers intuitionistiska matematik: för att bevisa en existensutsaga måste en explicit metod anges som leder till det som i utsagan sägs existera. Ett indirekt bevis som antar motsatsen, d v s att inget passande objekt finns, och härleder en motsägelse ur detta antagande, anses av intuitionistiska matematiker vara för svagt och accepteras inte, likaledes som de impredikativa metoderna inom andra ordningens logik och enkel typteori. Under användning av denna konstruktiva syn på existens kan sanning för matematiska påståenden A förklaras som

A är sann = det finns ett bevis för A.

Ett bevis blir då en ”sanngörare” för det matematiska påståendet, som härigenom via Curry-Howard kan uppfattas som en mängd av bevis.

Den första versionen av CTT – ***C**onstructive **T**ype **T**heory* – använde en inkonsistent cirkulär princip

typ:typ

som visade sig leda till Girards paradox, en variant av Mirimannoffs paradox. Lämpliga omformuleringar och begränsningar ledde 1972 och 1973 till två alternativa konsistenta presentationer av CTT och för bägge bevisades normalisering med hjälp av den metamatematiska *computability*-metoden som använts av honom och Prawitz, exempelvis i Oslo-volymen.

Från 1975 har Martin-Löf övergivit det metamatematiska perspektivet och i stället använt ett formellt språk med mening. De första försöken använde sig av eliminationsregler som meningsgrundande, men visade sig icke leda till en fungerande teori. Från 1978 har matematiska påståenden förklarats i termer av hur deras bevis[-objekt] kan ställas samman ur sina delar [i analogi med Gentzens introduktionsregler] och vid VI:e LMPS-kongressen i Hannover 1979 publicerades dessa meningsförklaringar. På grund av den sista läsarten för den fundamentala relationen t:A, d.v.s ’t är ett program som möter specifikationen A’, visade sig CTT fungera som ett kraftfullt programmeringsspråk, och fick omedelbart ett stort inflytande. Bland annat vid Chalmers i Göteborg har dataloger utforskat typteorins möjligheter, men numera är dess synsätt spritt över hela världen, med årligen återkommande TYPES-möten, etc. År 1986 utvidgades CTT med ett högre skikt till ett s.k. l*ogiskt ramverk* och sedan dess har språket och meningsförklaringarna legat fast.

Lingvister har givit en konstruktiv version av s k Montague-grammatik genom att använda den rikare typstrukturen hos CTT och denna har visat sig vara utomordentligt fruktbar inom automatisk språkbehandling via så kallade ”sugaring”-algoritmer. Vikten av CTT:s tillämpningar inom datalogi och formell lingvistik kan svårligen överskattas. Ett synnerligen viktigt exempel här, även inom ren matematik, utgör homotopi-typteori och sambandet med Voevodskys *univalent foundations.*

Martin-Löf själv har under de senaste två årtiondena ägnat mycket arbete åt filosofiska konsekvenser av CTT:s synsätt, och ett antal uppsatser om dessa teman finns i tryck. Han är dock en sparsmakad skribent och långt mer material finns opublicerat. I det publicerade materialet kan man särskilja tre komponenter, där konstruktiv typteori intar en unik position i samtida filosofi:

1. dess formella språk är ett tolkat språk, med en innehållslig meningsteori, och ges icke en metamatematisk, modell-teoretisk semantik;
2. typteorin återinför omdömet som jämbördigt med påståendet (”propositionen”) inom logiken;
3. typteorins kunskapsuppfattning använder första personsperspektivet: ***Jag*** *vet att A är sann*, snarare än det gängse tredje personsperspektivet ***agent M*** *vet att A är sann.*

I mycket sena arbeten har Marin-Löf lagt till en deontologisk nivå på vilken ett dialogteoretiskt perspektiv införes. Förutom den ontologiska propositionsnivån, och den kunskapsteoretiska omdömesnivån, tillkommer nu en deontologisk dialognivå rörande epistemiska rättigheter och skyldigheter.

Såväl Dag Prawitz som Per Martin-Löf har hedrats av det (inter)nationella forskarsamhället. Bägge är ledamöter av KVA och Academia Europaea, och har sedan 1971 upprepade gånger varit inbjudna talare på LMPS kongresser. Martin-Löf har givit Gödelföreläsningen till *Association for Symbolic Logic* och Tarskiföreläsningarna vid Berkeley-universitetet. Prawitz har erhållit Ann-Kersti och Carl-Hakon Swensons pris för humanistisk och samhällsvetenskaplig forskning från Vitterhetsakademin, medan Martin-Löf är hedersdoktor i Leiden och Marseille.