

## Stabil matchning: teori, evidens, och praktisk design

Årets pris till **Lloyd Shapley** och **Alvin Roth** spänner över ett vitt fält från abstrakt teori utvecklad på 1960-talet, över empirisk forskning från 1980-talet till lösningar av aktuella praktiska problem, exempelvis hur nya läkare ska fördelas mellan olika sjukhus eller hur njurar och andra organ för transplantation ska tilldelas patienter. Lloyd Shapley utförde de tidiga teoretiska studierna, och Alvin Roth upptäckte två decennier senare hur användbara Shapleys resultat var för att förstå den amerikanska marknaden för nya läkare. Roths forskning kom att inspirera såväl vidare teoriutveckling som praktisk utformning av nya marknadsinstitutioner.

Ekonomer är vana att studera marknader där resurser allokeras genom att priser anpassar sig till utbud och efterfrågan. Visserligen säger teori och praktiska erfarenheter att marknader fungerar väl i många situationer, men det finns också fall där den vanliga marknadsmekanismen stöter på problem. Ibland är det heller inte möjligt att alls använda priser för att allokera resurser: skolor och universitet har ofta inte rätt att ta ut terminsavgifter, och i fallet med mänskliga organ är betalningar uteslutna av etiska skäl. Ändå måste resurser allokeras, i dessa och andra liknande situationer. Hur fungerar sådana processer? Under vilka förhållanden blir resultatet effektivt?

### Matchningsteori

#### *Gale-Shapleyalgoritmen*

För att analysera allokeringsproblem kan man utgå från en abstraktion: om rationella individer som agerar i sitt eget bästa intresse kan handla fritt med varandra utan begränsningar, så borde utfallet bli effektivt. Om så inte vore fallet, skulle några individer kunna förbättra sin situation genom att handla med varandra. En allokering där ingen individ har något att vinna på ytterligare handel kallas *stabil*. Begreppet stabilitet är centralt inom kooperativ spelteori, en gren av matematisk ekonomi som undersöker hur grupper av samarbetande individer kan välja en allokering av resurser. Lloyd Shapley var huvudarkitekten i utvecklingen av detta teoriområde på 1950- och 1960-talet.

Möjligheten till obegränsad handel är en grundförutsättning för begreppet stabilitet. Denna abstraktion gör analysen klar men kan vara svårsmält i många verkliga situationer. I en kort uppsats från 1962, tillsammans med David Gale, tillämpade Shapley stabilitetsbegreppet på det speciella fallet med *parvis matchning*: hur ska man bäst para ihop individer två och två när de alla har olika uppfattningar om vem som är den bästa partnern?

#### *Matchning av partners*

Gale och Shapley analyserade parvis matchning på en allmän abstrakt nivå, men låt oss här illustrera analysen med ett av deras egna exempel: Hur ska tio kvinnor och tio män matchas ihop så att var och en får en partner som motsvarar de egna preferenserna så väl som möjligt? Utmaningen är att hitta en enkel mekanism som leder fram till en stabil matchning, där inget par av individer kan förbättra sin situation genom att byta partner. Lösningen – Gale-Shapleyalgoritmen – är en uppsättning enkla regler som alltid leder fram till en stabil matchning.

Gale-Shapleyalgoritmen kan utformas på två skilda sätt: ett där männen friar till kvinnorna och ett där kvinnorna friar till männen. I det senare fallet startar processen med att varje kvinna friar till den

man hon tycker bäst om. Så jämför varje man de olika förslag han fått (om några alls) och behåller det mest attraktiva (utan att slutgiltigt acceptera det) samt förkastar övriga alternativ. De kvinnor som blev ratade i första omgången friar nu till den man de tycker näst bäst om, varpå varje man åter behåller sitt mest attraktiva alternativ och förkastar de övriga. Processen fortgår tills ingen kvinna behöver fria på nytt. På detta stadium accepterar alla män det frieri de behållit och processen tar slut. Gale och Shapley bevisade matematiskt att denna process alltid leder till en stabil matchning.

De visade också att den specifika utformningen av algoritmen påverkar hur fördelaktig matchningen blir för respektive part. Det har alltså stor betydelse om det är männen eller kvinnorna som har rätten att fria. När kvinnorna friar blir slutresultatet bättre för kvinnorna – ingen kvinna får det sämre och somliga kvinnor får det bättre – än om männen friar. I själva verket är resultatet bättre för kvinnorna än någon annan stabil matchning och, omvänt, är resultatet när männen friar det sämsta stabila utfallet från kvinnornas perspektiv.

Klarheten och elegansen i Gale-Shapleys analys bidrog till att deras uppsats hamnade på läslistor för ekonomistudenter världen över. Men analysens betydelse för att förstå viktiga institutioner i verkligheten blev inte uppenbar förrän långt senare, när Alvin Roth i början av 1980-talet gav sig på att studera marknaden för nyexaminerade läkare.

## Evidens

### *Marknader för nya läkare*

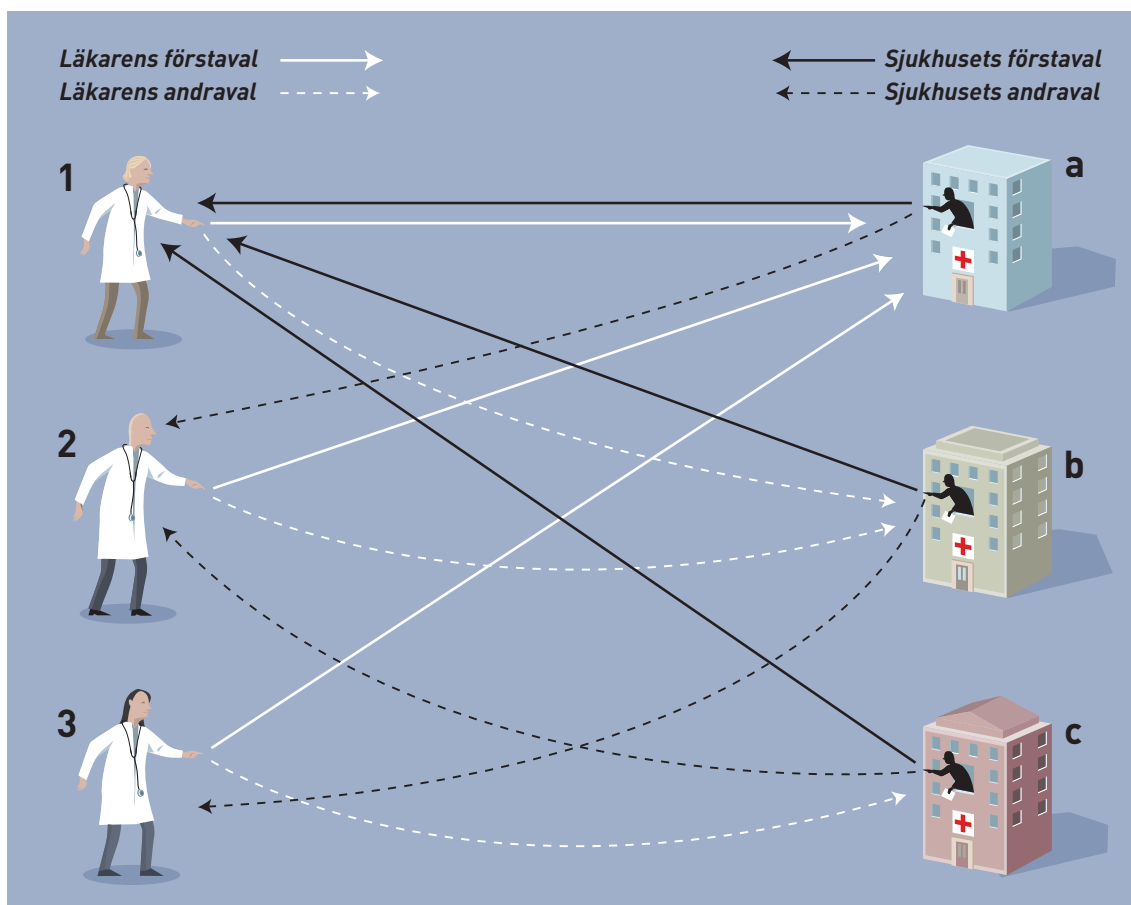
I USA får nyexaminerade läkare sin första anställning som residents på ett sjukhus (ungefär motsvarande en svensk AT-tjänst). Under den första delen av 1900-talet var marknaden för sådana anställningar väsentligen decentraliserad. På 1940-talet tvingade konkurrensen om ett otillräckligt antal läkare sjukhusen att erbjuda platser allt längre i förväg, ibland flera år innan de unga läkarna var färdigutbildade. Beslut om anställning måste fattas innan det var möjligt att bedöma läkarnas kvalifikationer och innan läkarna själva visste vilken medicinsk specialisering de föredrog. När ett sjukhus fick ett jobberbjudande avvisat, var det också ofta för sent att gå vidare med ett erbjudande till en annan kandidat. En sådan process leder inte fram till en stabil allokering, eftersom det inte finns tid att lämna så många erbjudanden att man uttömmar alla möjligheter till ömsesidigt gynnsamma byten. För att påskynda processen gav sjukhusen studenterna deadlines. Men detta tvingade studenterna att fatta beslut i förtid, utan kännedom om de möjligheter som senare skulle kunna öppna sig.

Till följd av dessa problem inrättades i början av 1950-talet ett centraliserat "clearinghus", *the National Resident Matching Program* (NRMP) där lediga tjänster och sökande matchades centralt. I en uppsats från 1984 studerade Al Roth den metod som NRMP använde och upptäckte att den var nära besläktad med Gale-Shapleyalgoritmen. Han drog slutsatsen att NRMP:s framgång byggde på att systemet garanterade en stabil matchning. I början av 1990-talet studerade Roth motsvarande läkarmarknader i Storbritannien. Där hade olika regioner tillämpat olika metoder, varav vissa ledde till stabila matchningar och andra inte. Roth fann att just de algoritmer som gav stabila matchningar hade visat sig framgångsrika, medan de andra hade brutit samman på olika sätt.

## Praktisk design

### *Läkare och sjukhus*

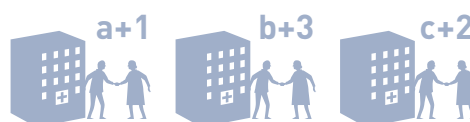
Trots sin framgång stötte NRMP så småningom på nya problem. Antalet kvinnliga medicinstudenter ökade efter hand, och det blev allt vanligare med gifta läkarpar som ville ha tjänst på samma ort. Då NRMP inte kunde tillgodose sådana önskemål, slutade många läkare att använda systemet, ett tecken på att det inte var stabilt. NRMP – där sjukhusen lämnade erbjudanden till de nya läkarna – kritiserades



**Utfall om läkarna väljer sjukhus**



**Utfall om sjukhusen väljer läkare**



Matchning av läkare och sjukhus. När läkarna får lämna erbjudanden väljer alla först sjukhus a, som accepterar budet från läkare 1 (sjukhusets förstaval). I ett andra steg lämnar läkare 2 erbjudande till sjukhus b och läkare 3 till sjukhus c, vilket resulterar i en stabil matchning. När sjukhusen har förslagsrätt blir istället läkare 2 matchad med sjukhus c och 3 med b.

också för att favorisera sjukhusen framför studenterna. Precis som Gale och Shapley hade visat teoretiskt, så gynnar algoritmen systematiskt den part på marknaden som lämnar erbjudanden. År 1995 ombads därför Roth att förbättra algoritmen. Tillsammans med Elliott Peranson utformade han en algoritm, som dels tog hänsyn till par av sökande och dels förde över förslagsrätten till de sökande läkarna. Den nya algoritmen, som började tillämpas 1997, har fungerat väl och används idag för att matcha över 20 000 läkartjänster med sökande per år.

Roth och hans kollegor hade också använt sig av ny teori. Det hade varit möjligt att manipulera den ursprungliga NRMP-algoritmen: genom att tacka nej till bättre erbjudanden och behålla sämre kunde läkarna i vissa fall få en bättre placering. I ett antal teoretiska uppsatser visade Roth att det kunde ligga i den mottagande sidans intresse (läkarna i den ursprungliga NRMP-algoritmen) att uppge en annan rangordning än den sanna. Den nya algoritmen kunde utformas så att den var immun mot sådan manipulation. Genom simuleringar kunde Roth också visa att det i praktiken inte heller fanns något utrymme för sjukhusen att manipulera systemet.

### **Studenter och skolor**

Gale-Shapleyalgoritmen skulle också visa sig användbar i andra fall. Före 2003 fick sökande till gymnasieskolor i New York rangordna fem alternativ. Dessa rangordningar sändes sedan till skolorna, som beslöt om en viss elevs ansökan skulle accepteras, sättas på väntelista eller avslås. Processen upprepades sedan ytterligare två gånger, varpå de elever som stod utan skola efter den tredje rundan placerades genom ett administrativt beslut. Systemet gav varken eleverna tillräckligt utrymme att ange sina preferenser eller skolorna tillräckliga möjligheter att lämna erbjudanden. Följden blev att ca 30 000 elever varje år hamnade på skolor som de inte uttryckt något som helst önskemål om. Vidare kunde elever med liten chans att antas av sin favoritskola tjäna på att ange ett mer realistiskt förstahandsval. Elever som uppgav sin sanna rangordning riskerade däremot att få en onödigt dålig placering. År 2003 reformerade Roth och hans kollegor antagningsprocessen i New York utifrån en version av Gale-Shapleyalgoritmen där de sökande har förslagsrätt. Den nya algoritmen visade sig framgångsrik, och antalet studenter som hamnade på skolor de inte önskat sig minskade med 90 procent. Idag använder ett växande antal amerikanska städer en variant av Gale-Shapleyalgoritmen för skolplacering.

### **Njuror och patienter**

De matchningssituationer vi hittills diskuterat har två parter som båda fattar beslut. I vissa situationer är det dock bara den ena parten som tar ett aktivt beslut, medan den andra parten är helt passiv. Ett exempel är fördelningen av njurar och andra organ till patienter i behov av transplantation. Hur kan en sådan matchning ske på ett effektivt sätt?

Ett sådant ensidigt matchningsproblem studerades av Shapley och hans kollegor, åter i abstrakt form och med fokus på stabilitet. Den föreslagna algoritmen (så kallad *top trading cycle*) är enkel och bygger på en initial tilldelning med utrymme för byten. En speciell utmaning i allokeringen av mänskliga organ är att vissa organ av medicinska skäl bara passar ihop med vissa patienter. Därför kan det behövas långa och tidskrävande byteskedjor. Även här använde forskarna en kombination av teori och experiment för att jämföra olika versioner av algoritmen. Alltmer komplexa byteskedjor av njurar tillämpas nu i ett antal amerikanska delstater.

### **Nya marknader**

Priser har inte spelat någon roll i de exempel vi diskuterat. Gör avsaknaden av en prismekanism Gale-Shapleyalgoritmen mindre tillämpbar? Inte nödvändigtvis. Shapley och andra forskare har undersökt utvidgningar av ursprungsmodellen till situationer där priser förekommer, till exempel när lönen är en del av sjukhusens erbjudanden till läkarna. Det visar sig att algoritmer som anpassats för sådana fall fungerar på likartat sätt och leder till stabila matchningar. Här finns en nära koppling till auktioner, där priserna är centrala för att tilldela föremål till köpare. Forskning som relaterar matchningsmetoder till auktionsteori har gett intressanta resultat med stor potential för praktisk tillämpning. Ett viktigt exempel är Internet-auktioner, särskilt sökmotorer som auktionerar ut annonsutrymme. Företag i denna bransch har dragit nytta av insikter som bygger på Gale och Shapleys teori och anställt framstående ekonomer som experter för att utforma nya auktionsformer.

Årets pris belönar ett blomstrande forskningsområde som utvecklats i ett nära samspel mellan teori, empirisk evidens och praktisk design. Lloyd Shapley och Alvin Roth har arbetat oberoende av varandra, men framgången för deras forskning är frukten av en kombination av Shapleys teoretiska resultat med Roths insikter om deras praktiska värde. Området fortsätter att växa och finner ständigt nya tillämpningar.

---

## LÄNKAR OCH LÄSTIPS

Mer information om årets priser, bland annat en vetenskaplig bakgrundsartikel på engelska, finns på Kungl. Vetenskapsakademiens webbplats, <http://kva.se> och på <http://nobelprize.org>. Där kan man också se presskonferensen som webb-TV. Mer information om utställningar och aktiviteter kring Nobelpriset och Ekonomipriset finns på [www.nobelmuseum.se](http://www.nobelmuseum.se).

### **Blogg**

*Market Design*

[www.marketdesigner.blogspot.se](http://www.marketdesigner.blogspot.se)

### **Föreläsningar (video)**

**Roth, A. E.** (2007) *What Have We Learned from Market Design*, Rosenthal Memorial Lecture. Boston University. [www.youtube.com/watch?v=7qrYC00jf-o](http://www.youtube.com/watch?v=7qrYC00jf-o)

**Roth, A. E.** (2007) *Market Failure and Market Design*, Google Tech Talks. [www.youtube.com/watch?v=4td0Y-HHC7s](http://www.youtube.com/watch?v=4td0Y-HHC7s)

### **Översiktsartikel**

**Roth A. E.** (2008) What have we learned from market design?, *Economic Journal*, 118: 285–310.

### **Böcker**

**Moulin H.** (1995) *Cooperative Microeconomics*, Princeton University Press.

**Roth A. E. och Sotomayor M.** (1990) *Two-sided Matching: a Study in Game-theoretic Modeling and Analysis*, Econometric Society Monograph Series, Cambridge University Press.

### **Vetenskapliga artiklar**

**Gale, D. och L. S. Shapley** (1962) College admissions and the stability of marriage, *American Mathematical Monthly*, 69: 9–15.

**Serrano, R.** (2009) Cooperative games: core and Shapley value, In: *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, Edited by R. Meyers. New York: Springer.

---

## PRISTAGARE

### **ALVIN E. ROTH**

Amerikansk medborgare. Född 1951 (60 år) i USA. Fil.dr 1974 vid Stanford University, Stanford, CA, USA. George Gund Professor of Economics and Business Administration vid Harvard University, Cambridge, MA, USA, och Harvard Business School, Boston, MA, USA.

<http://kuznets.fas.harvard.edu/~aroth/alroth.html>

### **LLOYD S. SHAPLEY**

Amerikansk medborgare. Född 1923 (89 år) i Cambridge, MA, USA. Fil.dr 1953 vid Princeton University, Princeton, NJ, USA. Professor emeritus vid University of California, Los Angeles, CA, USA.

[www.econ.ucla.edu/shapley/index.html](http://www.econ.ucla.edu/shapley/index.html)