Det finns ingen kungsväg till geometrin (Euklides)

Den rysk-amerikanske matematikern ***Yakov Eliashberg*** *är en av de ledande matematikerna i vår tid. I drygt trettio år har han varit med att utforma och utforska ett fält inom matematiken som kallas symplektisk geometri. Yakov Eliashberg har löst många av de viktigaste frågeställningarna inom fältet och hittat nya överraskande resultat. De tekniker han använt utvecklade han vidare inom kontaktgeometrin, en tvillingteori till den symplektiska geometrin. Båda teorierna står i nära relation till utvecklingen inom den moderna fysiken i dag.*

Universum är geometriskt. För hundra år sedan presenterade Albert Einstein denna revolutionerande idé i sin allmänna relativitetsteori. I den beskrevs gravitationen inte längre som en newtonsk dragningskraft som verkar på olika massor utan som en krökning av rummets och tidens geometri. Grunden för denna geometri lades fram redan i mitten av 1800-talet av den tyske matematikern Bernhard Riemann. Hans ambition var att utveckla geometri för att beskriva det mycket stora och det mycket lilla. Vilket var precis vad som hände sedan.

Men geometri är mycket äldre än så. Det är en av de äldsta vetenskaperna med rötter i det gamla Egypten och Babylonien för omkring 5 000 år sedan. Själva ordet geometri har sitt ursprung i grekiskans *geo,* som betyder jord, och *metria* – mäta.

Mycket riktigt handlade geometrin från början om praktiska behov som att mäta och fördela land, konstruera byggnader eller beräkna astronomiska storheter. Den handlade om ytor, figurer och former, om kvadrater och kuber, cirklar och sfärer. Om parallella linjer som aldrig korsar varandra och trianglar där summan av vinklarna är 180 grader. Greken Euklides samlade och formulerade all den antika geometriska kunskapen i ett verk, *Elementa*, och hans euklidiska geometri är den som fortfarande lärs ut i skolorna idag.

Geometri kan dock ta sig många olika skepnader. Det räcker med att rita en triangel på jordens krökta yta för att upptäcka att det måste finnas andra sorters geometrier. Till exempel i en triangel med ett hörn på Nordpolen och två på ekvatorn kan alla vinklar vara 90 grader, och summan av vinklarna blir då 270 grader.

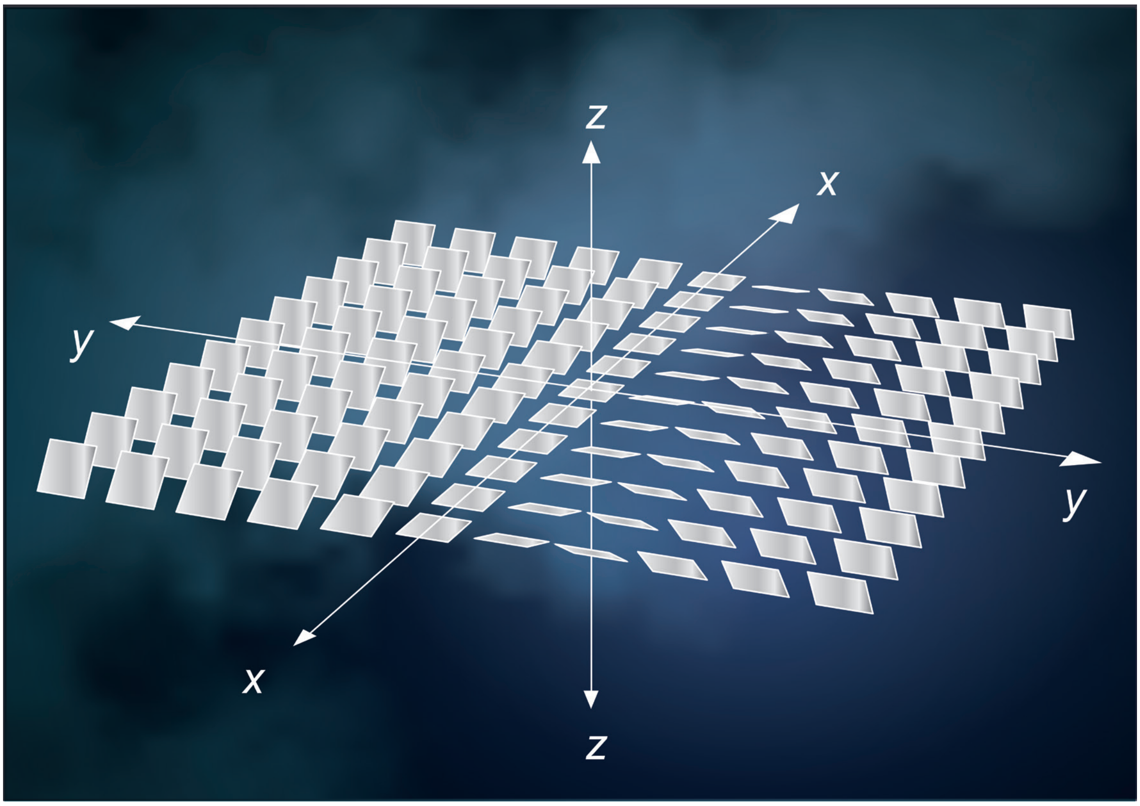
Bernhard Riemann undersökte inte bara krökta tvådimensionella ytor, utan vidgade begreppen till flerdimensionella rymder, som kallas *mångfalder*, och presenterade sina upptäckter i ett berömt föredrag i Göttingen 1854. Det var det riemannska krökta rummets geometri som blev oumbärlig för Albert Einstein när han i sin allmänna relativitetsteori skulle beskriva hur den tomma rymden kröks av massor hos stjärnor, galaxer och galaxhopar.

Förutom den euklidiska och den riemannska geometrin finns också en mindre känd sorts geometri som är ännu djupare rotad i fysiken: symplektisk geometri. Riemanns geometri kan något förenklat sägas vara en utvidgning av den euklidiska geometrin till krökta rum med flera dimensioner. Så kan även den symplektiska geometrin beskrivas – som en kroklinjig utvidgning av den välbekanta euklidiska geometrin.

Skillnader mellan Riemanns och den symplektiska geometrin är dock väsentliga och inte ännu helt utforskade, trots att den symplektiska geometrin har flera hundra år gamla rötter. Den symplektiska geometrin användes först för att studera den klassiska mekaniken, som fick sin början med Isaac Newtons rörelselagar på 1600-talet. Därmed utgör den själva grunden för klassisk fysik.

Ett klassiskt mekaniskt system kan vara en planet som kretsar kring solen, en elektron som rör sig i ett elektromagnetiskt fält, en svängande pendel eller ett äpple som faller. Under 1800-talet ledde utvecklingen inom den klassiska fysiken till att de ofta komplicerade beräkningarna med Newtons differentialekvationer förenklades. Istället infördes metoder för att beskriva och förstå rörelse i termer av symplektisk geometri. Fysik blev geometri.

Symplektisk geometri beskriver till exempel geometrin för rummet av lägen och hastigheter hos ett mekaniskt system, det så kallade fasrummet. För ett objekt i rörelse bestäms banan i varje stund av objektets läge och hastighet, alltså av ett par storheter. Tillsammans bestämmer de ett ytelement som är den symplektiska geometrins grundstruktur. Geometrin beskriver i vilka riktningar systemet kan utveckla sig, den beskriver rörelsen.



Kontaktstruktur.

Redan under 1800-talet visade matematiker att dessa ytelement bevaras, det vill säga den förblir konstant med tiden, vilket har blivit ett viktigt kännemärke för den symplektiska geometrin. Yt-elementen har också fått sin kvantfysikaliska tolkning i Heisenbergs osäkerhetsprincip som säger att det inte går att samtidigt exakt bestämma en partikels position och hastighet. Då kan man tänka på en symplektisk yta som ett mått på de sammanflätade storheterna: läge och hastighet.

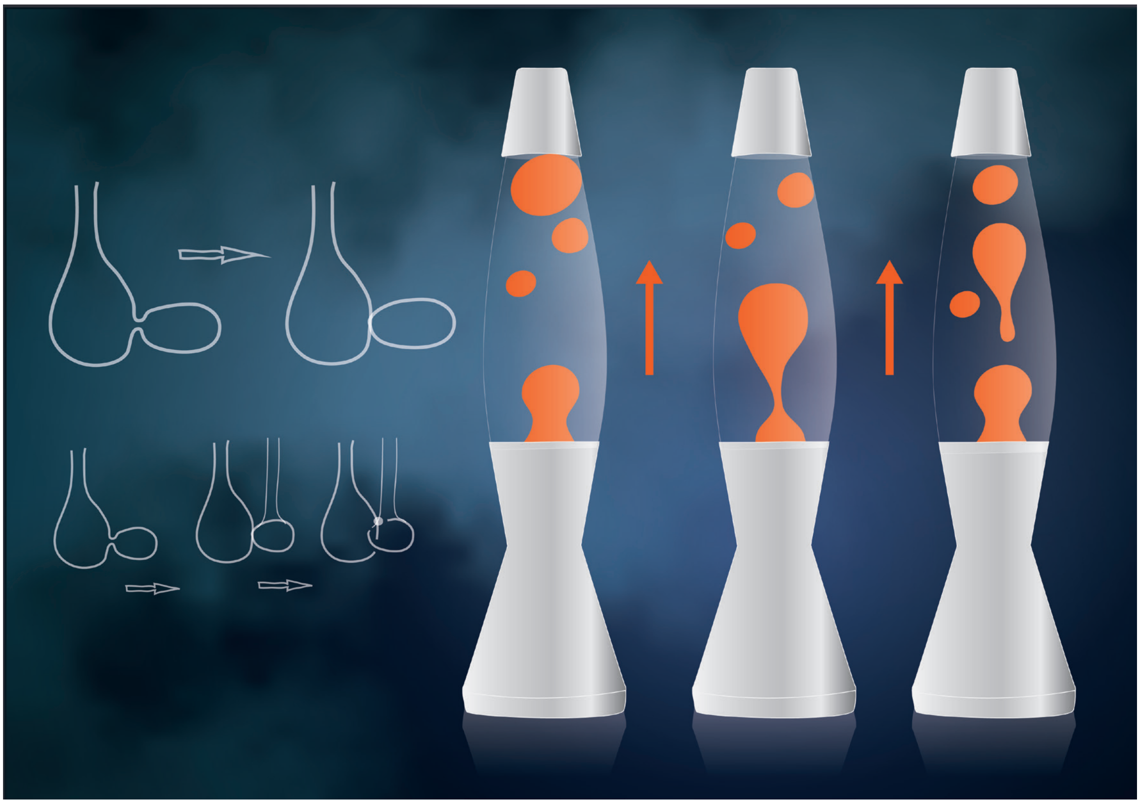
Dessa två storheter leder till en plan, tvådimensionell geometri. Men den kan generaliseras till geometrier i fyra, sex eller högre jämna dimensioner, vilka har blivit intressanta studieobjekt för både matematiker och fysiker under de senaste decennierna.

Det moderna intresset för symplektisk geometri väcktes i slutet av 1970-talet av den ryska matematikern Vladimir Arnold. År 1982 belönades han med det allra första Crafoordpriset i matematik.

Arnold formulerade ett antal centrala problem att hitta lösningar till. Yakov Eliashberg hörde till dem som lät sig inspireras. Det är inte lätt att göra hans insatser full rättvisa i en kort text. Alltsedan 1980-talet har han varit en frontfigur inom fältet och har med sin banbrytande forskning både utvidgat och fördjupat den symplektiska geometrin och dess närliggande områden, några av dem han själv utvecklade.

Till hans första och kanske mest överraskande resultat hör upptäckten av att det inom den symplektiska geometrin finns regioner med både flexibla och rigida objekt och fenomen. Flexibla objekt, som studeras av den gren inom matematiken som kallas topologi, är sådana som inte förlorar sina egenskaper när de sträcks ut, vrids och böjs. De rigida objekten får däremot inte deformeras fritt om de ska behålla sina egenskaper.

Utmaningen var bland annat att hitta de avgörande dragen hos objekten som leder till att de är rigida eller flexibla. Eliashberg har gång på gång kunnat visa att gränsen mellan de två regionerna inte alltid är där den först verkar vara.



Holomorfa kurvor.

Till den symplektiska geometrins karaktäristiska egenskaper hör att alla symplektiska rum i liten skala, alltså lokalt, ser likadana ut trots att de är olika globalt. Medan det i en vanlig geometri går att se de stora dragen redan när man studerar små fragment: om man har en boll, så räcker det att rita en liten triangel på bollens yta för att upptäcka att ytan är krökt. Så är det alltså inte i den symplektiska geometrin.

Yakov Eliashberg har identifierat de minsta byggstenarna som gör att om geometrin lokalt ser ut på ett visst sätt, så medför det att allting ser likadant ut även i stor skala. Det innebär också att man befinner sig i den flexibla regionen. Eliashbergs flexibilitetssats säger att en rigid region kan omvandlas till en flexibel om man inför en enda sådan liten byggsten. Exempelvis skulle ett så stabilt och stelt bygge som Eiffeltornet tappa sin rigida form om en liten flexibel byggsten lades in, tornet skulle bli lealöst och rasa samman.

Finns det däremot ingen sådan flexibel byggsten så befinner man sig i vår rigida värld där saker och ting behåller sin form. En sådan värld byggs upp av strängar, om man ska tro fysikens strängteori som försöker att förena 1900-talets två mest framgångsrika fysikteorier – kvantmekanik och den allmänna relativitetsteorin. Strängteorin har länge haft intensivt idéutbyte med den symplektiska geometrin när det gäller begrepp, problem och lösningar.

Ett numera klassiskt exempel är *non-squeezing-satsen*, som av Vladimir Arnold även döpts till principen om den *symplektiska kamelen* efter ett omformulerat bibelcitat: ”Det är lättare för en rik man att komma in i himlen än det är för en symplektisk kamel att passera genom ett nålsöga”.

Det var den rysk-franska matematikern och Eliashbergs kollega Mikhail Gromov som visade att den symplektiska geometrin inte tillåter en sådan cirkuskonst; att dra en kamel igenom ett nålsöga. Skulle det bara handlat om volymen, så kunde kamelen sträckas ut i en lång och tunn tråd. Men det medger inte den symplektiska geometrin, här gäller rigiditet.

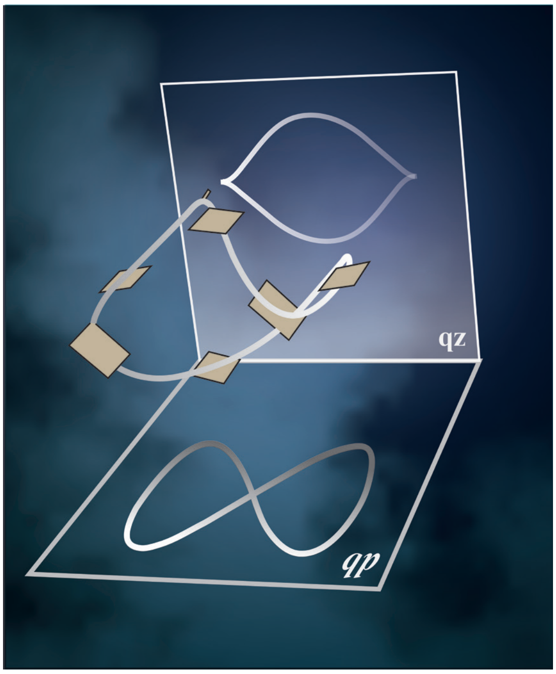
Problemet löstes med hjälp av Gromovs holomorfa kurvor, som senare kom att spela en viktig roll i strängteorin och fysikens kvantfältteori. De holomorfa kurvorna blev också ett centralt verktyg inom ett nytt forskningsfält, symplektisk topologi.

Eliashberg har tagit över mycket av den matematiken till kontaktgeometrin, som är en tvillingteori till den symplektiska, fast i udda dimensioner. Den udda dimensionen kan åstadkommas när den totala energin i ett mekaniskt system är konstant (enlig principen om att energin i ett slutet system varken kan skapas eller förstöras). Det innebär att systemet inte kan röra sig fritt i sina två frihetsgrader och då kan man ta bort en dimension.

Om exempelvis den konstanta energin bestämmer avståndet från mitten på ett plan, så kommer kontaktgeometrin att gälla på den endimensionella cirkeln runt mitten, medan runtomkring gäller symplektisk geometri i två dimensioner. De båda geometrierna är alltså mycket nära besläktade, och kontaktgeometri i en eller flera udda dimensioner har varit ytterligare ett av Yakov Eliashberg specialområden.

I mötet mellan kontaktgeometrin och den matematiska knutteorin finns så kallade Legendre-knutar. Det är knutar som måste följa speciella begränsningar dikterade av kontaktgeometrin. Med samma slags teknik som för kamelen kunde Eliashberg visa att det inte alltid går att transformera två Legendreknutar i varandra även om det inte finns några rent topologiska hinder. Knutarna är rigida.

Det stora matematiska maskineri som Eliashberg utvecklade för studier av rigiditet ledde till ett nytt fält – symplektisk fältteori – som i sin tur blev en källa till en mängd nya insikter, upptäckter och kopplingar till andra områden. Gång på gång har Yakov Eliashberg hittat nya områden och frågeställningar som är särskilt intressanta att utforska. Men var gränsen går mellan de flexibla och de rigida regionerna



Legendre-oknut.

och hur den kan beskrivas med matematik är fortfarande en fråga som väntar på sitt svar.

PRISTAGAREN

YAKOV ELIASHBERG

Född 1946 (69 år) i S:t Petersburg, Ryssland, Fil.dr vid Leningrad State University 1972. Herald L. and Caroline L. Ritch Professor of mathematics vid Stanford University, CA, USA.
http://mathematics.stanford.edu/people/name/yakov-eliashberg/

LÄNKAR OCH LÄSTIPS

Mer information om årets pris finns på Kungl. Vetenskapsakademiens webbplats,
http://kva.se/crafoordpriset och *www.crafoordprize.se*

***Föreläsningar av* Yakov Eliashberg (video)**

http://scgp.stonybrook.edu/video_portal/results.php?profile_id=985

Redaktion:
Sakkunniga ledamöter från Kungl. Vetenskapsakademien
Text: Joanna Rose
Illustrationer: Anna-Lena Lindqvist, Lindqvist Grafik & InfoDesign AB
Redaktör: Hans Reuterskiöld