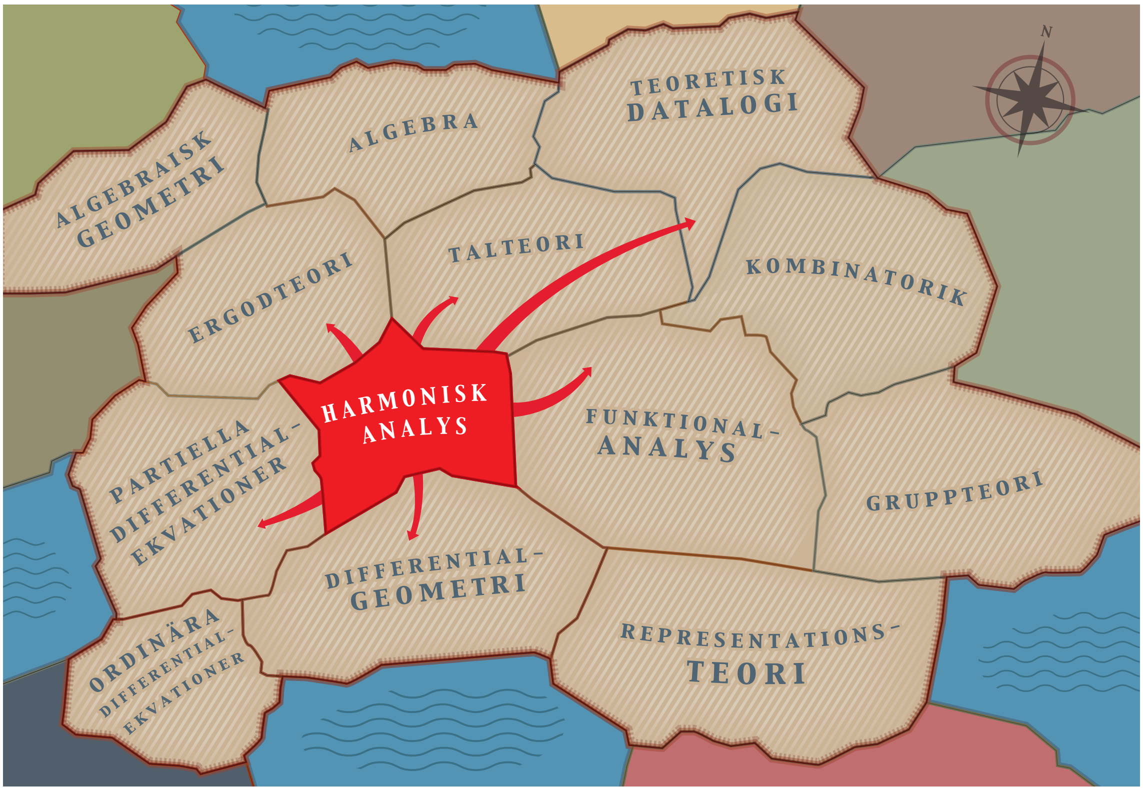
Med säkra steg genom matematikens fascinerande landskap

*Årets Crafoordpristagare, **Jean Bourgain** och **Terence Tao**, har löst en imponerande mängd viktiga matematiska problem. Deras oerhörda bredd och fenomenala kapacitet som problemlösare har gjort det möjligt för dem att upptäcka många nya och fruktbara samband och lämna fundamentala bidrag till forskningen inom flera vitt skilda grenar av matematiken.*

För många står matematiken som något färdigt och avslutat. Den lovar trygghet och oföränderlighet. Alla som i skolan tragglade sig igenom multiplikationstabellerna, Pythagoras sats eller algebraiska ekvationer har respekt för matematikens förmåga att leverera säkra svar till alla frågor. Men bakom detta tillsynes slutna bygge ligger ett vidsträckt matematiskt landskap öppet för utforskning. Ger man sig ut dit, som forskare gör, öppnas okända vidder med främmande berg, dalgångar och stigar att följa.

Så har matematiken utvecklats och vuxit fram under tusentals år. Nya livsdugliga teorier skapas, och de redan existerande förenklas och byggs ut. Man söker mönster och nya samband. I själva verket överträffar omfånget av den matematiska forskningen under det senaste århundradet allt som tidigare gjorts.



Jean Bourgain och Terence Tao har utnyttjat och utvecklat den harmoniska analysens verktygslåda för att lämna fundamentala bidrag till forskningen inom flera vitt skilda grenar av matematiken.

Ändå finns det problem som fortfarande är olösta. Några handlar om primtal, sådana som bara kan delas med ett eller sig själva: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, . . . – men, hur många är de egentligen? Euklides som verkade i Alexandria för 2 300 år sedan bevisade redan på sin tid att de är oändligt många.

1	43	142	746	595	714	191
2	48	425	980	631	694	091
3	53	709	214	667	673	991
4	58	992	448	703	653	891
5	64	275	682	739	633	791
6	69	558	916	775	613	691
7	74	842	150	811	593	591
8	80	125	384	847	573	491
9	85	408	618	883	553	391
10	90	691	852	919	533	291
11	95	975	086	955	513	191
12	101	258	320	991	493	091
13	106	541	555	027	472	991
14	111	824	789	063	452	891
15	117	108	023	099	432	791
16	122	391	257	135	412	691
17	127	674	491	171	392	591
18	132	957	725	207	372	491
19	138	240	959	243	352	391
20	143	524	193	279	332	291
21	148	807	427	315	312	191
22	154	090	661	351	292	091
23	159	373	895	387	271	991
24	164	657	129	423	251	891
25	169	940	363	459	231	791
26	175	223	597	495	211	691

Den för närvarande längsta kända aritmetiska primtalsföljden består av 26 primtal där skillnaden mellan successiva tal är 5 283 234 035 979 900.

Men en nära besläktad fråga fortsätter att gäcka matematikerna: hur många primtalstvillingar finns det? Tvillingar är par av primtal där skillnaden mellan dem är 2. Det är paren 3 och 5; 5 och 7; 11 och 13; 17 och 19, . . . osv. Är primtalstvillingarna, liksom primtalen, oändligt många? Denna till synes oskyldiga fråga har världens matematiker vänt och vridit på i århundraden och ingen vet säkert. Svårigheten beror bland annat på att ju högre upp bland heltalen man kommer desto mer sällsynta är primtalen.

Terence Tao, tillsammans med sin brittiske kollega Ben Green, löste ett likartat problem. Det handlar om aritmetiska talföljder, dvs. sådana där skillnaden mellan ett tal och dess direkta efterföljare är konstant. Till exempel är 5, 11, 17, 23 och 29 en aritmetisk följd av primtal med längd 5 där skillnaden mellan talen är 6. Green och Tao visade att om man vill hitta en aritmetisk följd av primtal med en i förväg bestämd längd så är det alltid möjligt, vilken längd på följden man än bestämt sig för.

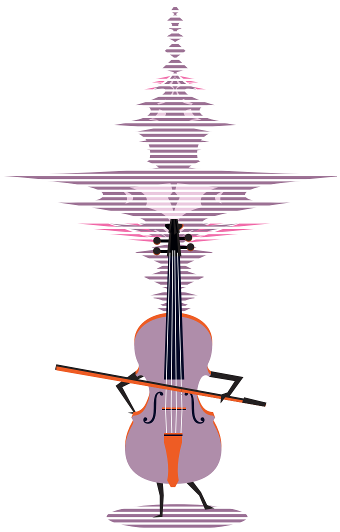
Det finns alltså godtyckligt långa aritmetiska följder av primtal, men däremot inget recept på hur vi kan få tag i dem. Att hitta en aritmetisk följd av, säg, 100 primtal är i nuläget bortom vår förmåga, trots att Green och Tao visat att sådana följder säkert existerar. Den för närvarande längsta kända aritmetiska primtalsföljden har längd 26. Det är en följd av 26 primtal som börjar med 43 142 746 595 714 191 och där skillnaden mellan successiva tal är 5 283 234 035 979 900.

De flesta av Jean Bourgains och Terence Taos mest fundamentala resultat har sin huvudsakliga betydelse inom en gren av matematiken kallad *matematisk analys*. Både Isaac Newton och Gottfried Wilhelm von Leibniz gjorde anspråk på att ha kommit på grundidéerna för matematisk analys i slutet på 1600-talet.

Analysen sysslar med funktioner, och funktioner beskriver samband. En funktion kan sägas vara en regel som parar ihop tal på ett visst sätt. Ett exempel på en funktion är att ta kvadraten på ett tal. Den funktionen parar ihop 2 med 4, 3 med 9, 7 med 49, och så vidare. Vissa funktioner kan ritas upp och analysen beskriver då dess form. Den säger hur funktionen varierar – växlar den snabbt eller långsamt, vänder uppåt eller neråt, var har den sitt högsta eller lägsta värde?

Newton använde analysen till att studera mekanik och astronomi. Under de senaste tre århundradena har den matematiska analysen genomsyrat fysikens och alla de andra naturvetenskapernas språk. Inte bara för att göra beräkningar och tolka ekvationerna, vilket är vad många naturvetare och ingenjörer sysslar med, utan också för att få oss att begripa verklighetens djupaste natur.

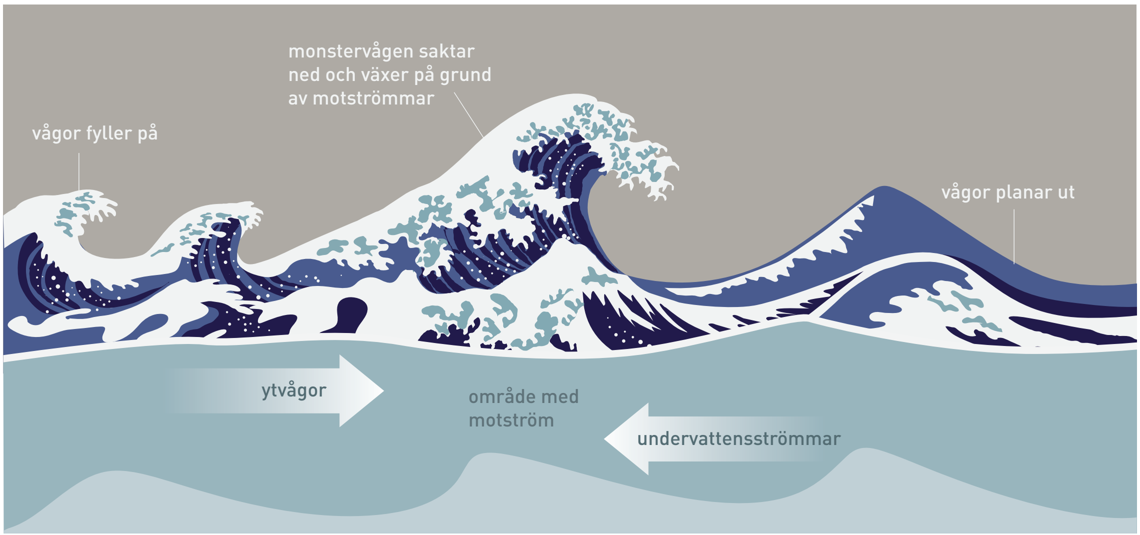
Ett epokgörande steg i utvecklingen av analysen togs av fransmannen Jean-Baptiste Joseph Fourier för nästan 200 år sedan. Han visade att i princip alla funktioner är överlagringar av enklare funktioner. Så kan till exempel en ton från en fiolsträng skrivas som en summa av en grundton och flera övertoner där frekvenserna är multipler av grundtonens frekvens. Harmonisk analys var född.



En harmonisk ton från en violinsträng kan skrivas som summan av en grundton och flera övertoner.

Den blev ett nyckelverktyg för att lösa differentialekvationer, den matematiska analysens kärna, och sådana ekvationer är ett nyckelverktyg för all ingenjörskonst, fysik och andra delar av den moderna vetenskapen. Det finns knappt någon gräns för tillämpningarna av denna del av matematiken som är under ständig utveckling.

Med Jean Bourgains och Terence Taos grundläggande insatser kan även en del av de svåraste, ickelinjära, ekvationerna numera studeras framgångsrikt. De beskriver verklighetens mer röriga skeenden, som turbulenta strömmar, tsunamivågor och kaos. Vem vet vad ekvationerna kan användas till i framtiden?



Båda pristagarna bidrog till att även en del av de svåraste, ickelinjära, ekvationerna numera kan studeras framgångsrikt. De beskriver verklighetens mer röriga skeenden, som turbulenta strömmar, tsunamivågor och kaos.

Utmärkande för matematiken är att stora framsteg länge kan ligga dolda för världen, begripliga bara för en handfull invigda. Så var det till exempel med Bernhard Riemanns geometri som först efter flera årtionden fick sin tillämpning i fysiken och blev grunden för Albert Einsteins allmänna relativitetsteori.

Till och med inom matematiken kan specialområden ligga dolda för andra matematikers ögon. Därför har, inom i den moderna matematiska forskningen, dialog och kommunikation med andra matematiker mer och mer blivit en nyckel till framsteg. Jean Bourgain och Terence Tao har själva och tillsammans med andra gjort förbluffande insatser i många delar av matematiken. De utnyttjar och utvecklar den harmoniska analysens verktygslåda på ett nydanande och överraskande sätt, vilket har väckt stor uppmärksamhet bland forskare världen över.

Harmonisk analys, med sin förmåga att hitta dolda mönster, har visat sig ytterst användbar även för forskning kring primtalen. Att hitta dem är som att hitta musiken i en mycket brusig inspelning. Primtalen, som ser ut att förekomma helt slumpmässigt bland alla heltal, kan på sätt och vis tolkas som enbart brus.

Länge betraktades fascinationen över dolda mönster hos primtalen som en konst för sin egen skull. Numera bygger våra krypteringsmetoder för dataöverföring just på svårigheten att hantera mycket stora primtal.

Ett annat oumbärligt verktyg för modern kryptografi, och för flera andra delar av datalogin, är förmågan att få fram slump av hög kvalitet. Rätt bra slump kan till exempel fås från brus i en dators mikrofon eller bilder på fallande löv i en webbkamera. Genom att använda metoder från harmonisk analys har Jean Bourgain visat hur man från två hyggliga och oberoende slumpkällor kan skapa en nästan perfekt slumpserie.

En fråga som både Jean Bourgain och Terence Tao har tagit sig an, tillsammans och var för sig ihop med andra, är det så kallade *Kakeyaproblemet*. Japanen Soichi Kakeya ställde 1917 en fråga, som kan tyckas vara ganska märklig: Vilken är den minsta yta på vilken man kan vända runt en nål? Det kan sägas handla om att göra en u-sväng med en bil på minsta yta, förutsatt att bilen är tunn som en nål. Tio år senare, 1927, kom ett överraskande svar – det går att rotera en nål på hur liten yta som helst.

Därmed var den ursprungliga frågan, som gällde två dimensioner (en yta), besvarad. Men i flera dimensioner har frågan i en annan variant levt vidare. Detta Kakeyaproblem har visat sig ha fundamental inommatematisk betydelse, och har blivit en utmaning för båda pristagarna. För hur udda det ursprungliga Kakeya-nålproblemet än ter sig, så ligger försöken att lösa det högredimensionella Kakeyaproblemet bakom en allt livligare matematisk utveckling under de senaste tre årtiondena. Själva lösningen finns inte än, men kanske mer intressant är de många tillvägagångssätten att besvara den. Kakeyaproblemet har till exempel djupa samband med problem inom harmonisk analys och frågeställningar om hela tal. Att kunna byta perspektiv och betrakta problemet från nya synvinklar har lett till många överraskande insikter.

På så sätt lyckades Jean Bourgain och Terence Tao öppna nya vägar in i matematikens fascinerande landskap. Än en gång har matematiken uppvisat samhörighet mellan sina olika grenar. Att metoder som används inom ett av matematikens områden blir nycklar till att lösa problem inom helt andra och tillsynes obesläktade områden visar på matematikens underliggande enhet.

LÄNKAR OCH LÄSTIPS

Mer information om årets pris finns på Kungl. Vetenskapsakademiens webbplats, http://kva.se/crafoordpriset, och på www.crafoordprize.se

Populärvetenskaplig artikel (engelska)

Journeys to the Distant Fields of Prime, 2007, by Kenneth Chang, New York Times, March 2007:
http://www.nytimes.com/2007/03/13/science/13prof.html?pagewanted=all

Vetenskapliga artiklar

Jean Bourgain (sammanställning av publikationer åren 1976–2011):
http://www.math.ias.edu/files/bourgain/Bourgain.pdf

Terence Tao (sammanställning av publikationer åren 1996–2011):
http://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/

Webbplatser

Terence Tao's blogg: *http://terrytao.wordpress.com/*
Wikipedia-artikel om Terence Tao: *http://en.wikipedia.org/wiki/Terence_Tao*
Wikipedia-artikel om Jean Bourgain: *http://en.wikipedia.org/wiki/Jean_Bourgain*

PRISTAGARE

JEAN BOURGAIN

Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, USA

Belgisk medborgare. Född 1954 (57 år) i Ostende, Belgien. Fil. dr 1977 vid Vrije Universiteit Brussel, Belgien. Professor vid Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, USA.

www.math.ias.edu/people/faculty/bourgain

TERENCE TAO

University of California, Los Angeles, CA, USA

Australisk och amerikansk medborgare. Född 1975 (36 år) i Adelaide, Australien. Fil. dr 1996 vid Princeton University, NJ, USA. Professor vid University of California, Los Angeles, CA, USA.

www.math.ucla.edu/~tao/

Sakkunniga ur priskommittén för Crafoordpriset i matematik: Michael Benedicks, Anders Björner, Johan Håstad och Bo Berndtsson (ordf.)
Text: Joanna Rose
Illustrationer: Johan Jarnestad/Swedish Graphics
Redaktör: Erik Huss